

Metodyka szacowania niepewności rozszerzonej

Opracował: mgr Mikołaj Kirpluk

Jest to szacowanie niepewności o asymetrycznych granicach przedziału ufności względem wartości średniej, co wynika z faktu określania wartości średniej jako średniej energetycznej.

1. Średni poziom dźwięku

Średni poziom dźwięku (dla jednakowo prawdopodobnych zdarzeń / pomiarów) obliczamy jako tzw. „średnią logarytmiczną” określoną wzorem:

$$L_{\text{śr.}} = 10 \cdot \lg \left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n 10^{\frac{L_i}{10}} \right] \quad [\text{A}]$$

2. Definicja poziomu dźwięku

Poziom dźwięku wyrażony w decybelach to 10 logarytmów dziesiętnych ze stosunku kwadratu ciśnienia akustycznego do kwadratu ciśnienia odniesienia równego $2 \cdot 10^{-5}$ Pa:

$$L_p = 10 \cdot \lg \frac{p^2}{p_0^2}, \quad \text{dB} \quad [\text{B}]$$

gdzie: p_0 - ciśnienie odniesienia $2 \cdot 10^{-5}$ Pa (próg słyszenia dla 1000 Hz)

3. Średnia ekspozycja względna

Przekształcając wzory [A] i [B] otrzymujemy:

$$\frac{p_{\text{śr.}}^2}{p_0^2} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{p_i^2}{p_0^2} \quad [\text{C}]$$

czyli **wartość oczekiwaną** dla wielkości p^2/p_0^2 - ekspozycji względnej (dla danego czasu pomiaru) - określoną wzorem na „średnią arytmetyczną”, dla której są określone matematyczne wzory statystyczne. Oznaczając wielkość p^2/p_0^2 jako **E** otrzymujemy:

$$E_{\text{śr.}} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E_i \quad [\text{D}]$$

4. Niepewność typu A

Niepewność typu A (oznaczana jako U_A) dotyczy rozrzutu statystycznego wyników pomiaru traktowanych jako zmienne losowe o następujących cechach:

- identyczne prawdopodobieństwo zdarzenia - dla wartości oczekiwanej określonej jako średnia arytmetyczna,
- niezależne,
- powtarzalne,
- pomiar nie wpływa na wynik.

4.1. Niepewność wyniku średniej z serii pomiarowej

Niepewność typu A określenia *poziomu imisji* lub *tła akustycznego* na podstawie n wykonanych pomiarów elementarnych oblicza się według następujących zasad:

- wyniki pomiarów elementarnych poziomu dźwięku wyrażone w „dB” przekształcamy do postaci ekspozycji względnej (ze wzoru [B]):

$$E_i = \frac{P_i^2}{P_0^2} = 10^{\frac{L_i}{10}} \quad [E]$$

- obliczamy wartość średnią (wartość oczekiwaną) - według wzoru [D]:

$$E_{sr.} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E_i$$

- obliczamy estymatę średniego odchylenie standardowego s wartości średniej zgodnie ze wzorem:

$$s = \sqrt{\frac{1}{n \cdot (n-1)} \sum_{i=1}^n (E_{sr.} - E_i)^2} \quad [F]$$

- szacujemy niepewność na poziomie ufności 95%, uwzględniając rozkład t-Studenta, (współczynnik $\tau(n)$ dla przedziału dwustronnego, tj. $t_{0,975}$ dla $n-1$ stopni swobody) korzystając ze wzoru:

$$U_{A,95}(E_{sr.}) = \tau(n) \cdot s \quad [G]$$

- określamy przedział ufności na poziomie 95% dla ekspozycji względnej jako:

$$\langle [E_{sr.} - U_{A,95}(E_{sr.})] \leftrightarrow [E_{sr.} + U_{A,95}(E_{sr.})] \rangle \quad [H]$$

- obliczamy granice przedziału ufności, określonego j.w., wyrażając je w wartościach poziomu dźwięku A (na podstawie wzoru [B]):

$$\left\langle 10 \cdot \lg[E_{\dot{s}r.} - U_{A,95}(E_{\dot{s}r.})] \leftrightarrow 10 \cdot \lg[E_{\dot{s}r.} + U_{A,95}(E_{\dot{s}r.})] \right\rangle \quad [I]$$

czyli:

$$\left\langle L_{do\ln a_granica} \leftrightarrow L_{g\acute{o}rma_granica} \right\rangle \quad [J]$$

- obliczamy wartości niepewności wartości średniej dla poziomu dźwięku:

wartość górna $+U_{A,95}^+$ (niepewność dla wartości większych od średniej) i wartość dolna $-U_{A,95}^-$ (niepewność dla wartości mniejszych od średniej) określone względem wartości średniej dla poziomu dźwięku dla wyżej obliczonego przedziału ufności jako:

$$\left\langle [L_{\dot{s}r.} - U_{A,95}^-(L_{\dot{s}r.})] \leftrightarrow [L_{\dot{s}r.} + U_{A,95}^+(L_{\dot{s}r.})] \right\rangle \quad [K]$$

i wynik wyrażamy jako:

$$L_{\dot{s}r.} (+U_{A,95}^+, -U_{A,95}^-) \quad [L]$$

Niepewność typu A określenia poziomu emisji lub tła akustycznego - szacowanie „in situ” na podstawie wykonanych pomiarów elementarnych (metoda inżynierska na podst.[2] - wygodna do określania niezbędnej liczby pomiarów elementarnych):

$$U_{A,95}(L_{im\ / \ tlo}) = q_{95} \cdot R$$

gdzie:

R - rozstęp pomiędzy najwyższym a najniższym wynikiem pomiarów elementarnych L_i :
 $R = \max(L_i) - \min(L_i)$

q_{95} - współczynnik rozkładu Lord'a dla poziomu ufności 95% zależny od liczby n wykonanych pomiarów elementarnych:

n	3	4	5	6	7	8	9	12
q₉₅	1,3	0,7	0,5	0,4	1/3	0,3	1/4	0,2

Uwaga: tak określona niepewność dla rozstępu 1 dB i liczby n do 7 szacuje wartości:

- $U_{A,95}^+$ z nadmiarem do 8%
- $U_{A,95}^-$ z niedomiarem do 40%

Dla większych rozstępów niedokładności się powiększają.

4.2. Niepewność wyniku obliczenia emisji

Niepewność typu A określenia **poziomu emisji** na podstawie obliczonych wartości średnich *poziomu imisji* oraz *tła akustycznego* oblicza się według następujących zasad:

- obliczamy wartość emisji wyrażonej jako ekspozycja względna:

$$E_{em} = E_{im} - E_{tlo_akustyczne} \quad [M]$$

UWAGA: wyrażając to samo jako poziom dźwięku, otrzymujemy znany wzór:

$$L_{em} = 10 \cdot \lg(E_{em}) = 10 \cdot \lg(E_{im} - E_{tlo_akustyczne}) = 10 \cdot \lg(10^{0,1 \cdot L_{im}} - 10^{0,1 \cdot L_{tlo_akustyczne}})$$

- określamy błąd wyniku emisji dla ekspozycji względnej:

$$U_{A,95}(E_{em}) = \sqrt{[U_{A,95}(E_{im.})]^2 + [U_{A,95}(E_{tlo_akustyczne.})]^2} \quad [N]$$

- następnie powtarzamy procedurę według wzorów od [H] do [L].

UWAGA:

W przypadku różnicy pomiędzy poziomem imisji a poziomem tła akustycznego powyżej 10 dB zgodnie z metodyką pomiarową [8] można pominąć wpływ tła akustycznego.

Jednak wtedy należy uwzględnić błąd związany z takim uproszczeniem (zawyżenie wyniku emisji), który wynosi 0,5 dB dla ww różnicy 10 dB, a 0,1 dB dla różnicy 15 dB.

4.3. Niepewność wyniku obliczenia poziomu równoważnego

4.3.1. Niepewność określenia czasu

Niepewność określenia czasu trwania sytuacji akustycznej dla której wykonano pomiary elementarne, należy określać według następujących zasad:

- zdarzenie trwające przez cały normatywny czas obserwacji **T** - niepewność równa „0”,
- zdarzenia o ściśle określonym czasie trwania w normatywnym czasie obserwacji - niepewność równa „0”,
- zdarzenia o zmiennym czasie trwania w normatywnym czasie obserwacji - niepewność określana zgodnie z wytycznymi zawartymi w [5] dla modelu „prostokąta”, gdzie dolną i górną granicę przedziału zdarzeń stanowi odpowiednio minimalny i maksymalny czas trwania sytuacji, a średni czas trwania jest przyjmowany jako średnia arytmetyczna z tych granic. Niepewność na poziomie ufności 95% przyjmuje się jako 95% odchylenia maksymalnego od wartości średniej w każdą stronę.
- w przypadku sytuacji akustycznych, których czasy trwania podlegają innym rozkładom - należy zastosować indywidualne podejście.

4.3.2. Niepewność określenia poziomu równoważnego

Niepewność typu A określenia poziomu równoważnego oblicza się na podstawie znanych udziałów emisji E_{em} dla każdej sytuacji akustycznej i czasów trwania tych sytuacji wraz z odpowiednimi niepewnościami $U_{A,95}(E_{em})$.

- ekspozycję względną równoważną dla m sytuacji akustycznych w normatywnym czasie obserwacji T określa się według wzoru dla ekspozycji względnych:

$$E_{eq} = \sum_{k=1}^m \frac{t_k}{T} \cdot E_k \quad [O]$$

UWAGA:

wyrażając to samo jako poziomy dźwięku, otrzymujemy znany wzór na poziom równoważny:

$$L_{eq} = 10 \cdot \lg(E_{eq}) = 10 \cdot \lg\left(\sum_{k=1}^m \frac{t_k}{T} \cdot E_k\right) = 10 \cdot \lg\left(\sum_{k=1}^m \frac{t_k}{T} \cdot 10^{0,1 \cdot L_k}\right)$$

- określa się niepewność ekspozycji względnej równoważnej dla każdej sytuacji akustycznej:

$$U_{A,95}(E_k) = \sqrt{\left[\frac{t_k}{T} U_{A,95}(E_{em})\right]^2 + \left[10^{0,1 \cdot L} \cdot \frac{U_{A,95}(t_k)}{T}\right]^2} \quad [P]$$

- określa się niepewność wynikowej ekspozycji względnej równoważnej dla sumy sytuacji akustycznych:

$$U_{A,95}(E_{eq}) = \sqrt{\sum_{k=1}^m [U_{A,95}(E_k)]^2} \quad [Q]$$

- następnie powtarzamy procedurę według wzorów od [H] do [L].

5. Niepewność typu B

Niepewność typu B (oznaczana jako U_B) jest związana z niedokładnością przyrządów pomiarowych, procedur badawczych i przyjmowanych modeli zjawisk akustycznych.

Sposoby określania tej niepewności powodują, że „szacowanie niepewności typu B to bardziej sztuka doświadczalna niż rzemiosło” [4] i określamy ją metodami innymi niż statystyki matematycznej - podstawą dla tych szacunków są:

- metryki, certyfikaty,
- dane literaturowe,
- wcześniej uzyskane dane pomiarowe,
- własne doświadczenie i wiedza,
- szczegółowa znajomość badanych zjawisk.

Dla znanych niepewności dla poziomów dźwięku, ze wzoru [B] otrzymujemy wzory na niepewności dla ekspozycji względnych (w przypadku ogólnym):

- wartość górna niepewności dla ekspozycji względnej:

$$\Delta E_+ = 10^{\frac{L_{sr.} + \Delta L_+}{10}} - 10^{\frac{L_{sr.}}{10}} = 10^{\frac{L_{sr.}}{10}} \cdot \left(10^{\frac{\Delta L_+}{10}} - 1 \right) \quad [R1]$$

- wartość dolna niepewności dla ekspozycji względnej:

$$\Delta E_- = 10^{\frac{L_{sr.}}{10}} - 10^{\frac{L_{sr.} - \Delta L_-}{10}} = 10^{\frac{L_{sr.}}{10}} \cdot \left(1 - 10^{-\frac{\Delta L_-}{10}} \right) \quad [R2]$$

Ponieważ występuje tu zależność od aktualnej wartości poziomu dźwięku, to wygodniejszą formą przedstawiania niepewności typu B będzie niepewność względna (względem wartości ekspozycji względnej) dla ekspozycji względnej (względem kwadratu ciśnienia odniesienia $p_0 = 2 \cdot 10^{-5}$ Pa):

- wartość górna niepewności względnej dla ekspozycji względnej:

$$\frac{\Delta E_+}{E} = 10^{\frac{\Delta L_+}{10}} - 1 \quad [S1]$$

- wartość dolna niepewności względnej dla ekspozycji względnej:

$$\frac{\Delta E_-}{E} = 1 - 10^{-\frac{\Delta L_-}{10}} \quad [S2]$$

Dla podanych / założonych / oszacowanych niepewności typu B wyrażonych jako odchylenia poziomów dźwięku otrzymujemy następujące niepewności względne typu B na poziomie ufności 95% dla ekspozycji względnych, przy założeniu takich samych odchyień, górnego i dolnego, dla poziomów dźwięku:

- dla zjawiska, dla którego rozkład gęstości prawdopodobieństwa jest modelowany „prostokątem”:

$$(\Delta L_+ = \Delta L_- = \Delta L) \Rightarrow \begin{cases} \frac{U_{B,95}^+(E)}{E} = \left(10^{\frac{\Delta L}{10}} - 1\right) \cdot 0,95 \\ \frac{U_{B,95}^-(E)}{E} = \frac{U_{B,95}^+(E)}{E} \cdot 10^{-\frac{\Delta L}{10}} \end{cases} \quad [T]$$

- dla zjawiska, dla którego rozkład gęstości prawdopodobieństwa jest modelowany „trójkątem”:

$$(\Delta L_+ = \Delta L_- = \Delta L) \Rightarrow \begin{cases} \frac{U_{B,95}^+(E)}{E} = \left(10^{\frac{\Delta L}{10}} - 1\right) \cdot \underbrace{\left(1 - \frac{\sqrt{5}}{10}\right)}_{\approx 0,767} \\ \frac{U_{B,95}^-(E)}{E} = \frac{U_{B,95}^+(E)}{E} \cdot 10^{-\frac{\Delta L}{10}} \end{cases} \quad [U]$$

- określenie niepewności względnej wynikowej typu B dla **W** uwzględnionych czynników wymaga przeprowadzenia rachunków na ekspozycjach względnych osobno dla granicy górnej i dla granicy dolnej:

$$\frac{U_{B,95}^+(E)}{E} = \sqrt{\sum_{j=1}^w \left[\frac{U_{B,95}^+(E_j)}{E} \right]^2} \quad [V1]$$

$$\frac{U_{B,95}^-(E)}{E} = \sqrt{\sum_{j=1}^w \left[\frac{U_{B,95}^-(E_j)}{E} \right]^2} \quad [V2]$$

Mając wynikowe niepewności względne dla ekspozycji względnych można też określić wartości niepewności wynikowej (górną i dolną) dla poziomów dźwięku:

$$U_{B,95}^+(L) = 10 \cdot \lg \left(1 + \frac{U_{B,95}^+(E)}{E} \right) \quad [W2]$$

$$U_{B,95}^-(L) = 10 \cdot \lg \left(1 - \frac{U_{B,95}^-(E)}{E} \right) \quad [W2]$$

6. Niepewność rozszerzona

Niepewność rozszerzona określona dla poziomu ufności 95% ($U_{R,95}$) badania hałasu jest skutkiem rozrzutu wyników pomiarów badanego hałasu wraz z tłem akustycznym (emisja) i tła akustycznego oraz niedokładności związanej z wykorzystanym sprzętem pomiarowym i zastosowaną procedurą pomiarową:

$$U_{R,95} = \sqrt{U_{A,95}^2 + U_{B,95}^2}$$

gdzie:

$U_{A,95}$ - niepewność typu A związana z rozrzutem wyników pomiaru

$U_{B,95}$ - niepewność typu B związana ze sprzętem i procedurą pomiarową

- określenie niepewności rozszerzonej wymaga przeprowadzenia rachunków na ekspozycjach względnych osobno dla granicy górnej i dla granicy dolnej:

$$U_{R,95}^+(E_{eq}) = \sqrt{[U_{A,95}^+(E_{eq})]^2 + [U_{B,95}^+(E)]^2} \quad [X1]$$

$$U_{R,95}^-(E_{eq}) = \sqrt{[U_{A,95}^-(E_{eq})]^2 + [U_{B,95}^-(E)]^2} \quad [X2]$$

- następnie powtarzamy procedurę według wzorów od [H] do [L] i otrzymujemy wynik wyrażony jako:

$$L_{eq} (+U_{R,95}^+, -U_{R,95}^-)$$

7. Literatura:

- [1] "*Statystyka w pomiarach akustycznych - podstawy*"
Mikołaj Kirpluk
- referat opublikowany w Materiałach XXXIV Zimowej Szkoły Zagrożeń Wibroakustycznych (luty 2006)
- [2] „*Szacowanie Niepewności Pomiarów Hałasu*”- wersja poprawiona i uzupełniona,
inż. Dariusz Fugiel (Tarnobrzeg, X 2002)
- [3] „*Matematyka - Poradnik encyklopedyczny*” - I.N.Bronsztejn, K.A.Siemiendajew
(PWN, Warszawa 1976)
- [4] „*Statystyka dla fizyków*” - Roman Nowak
(Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2002) ISBN 83-01-13702-9
- [5] „*Wyrażanie niepewności pomiaru. Przewodnik.*”
(GUM, 1999) ISBN 83-906546-1-x
- [6] *Tablice matematyczne - praca zbiorowa pod red. Witolda Mizierskiego*
(Wydawnictwo Adamantan, Warszawa 2004) ISBN 83-7350-048-0
- [7] „*Kombinatoryka i rachunek prawdopodobieństwa*” T.Gerstenkorn, T.Śródka
(PWN, Warszawa 1972) ISBN 83-01-00204-2
- [8] załącznik nr 8 do rozporządzenia Ministra Środowiska z dnia 23 grudnia 2004 r. *w sprawie wymagań w zakresie prowadzenia pomiarów wielkości emisji* (Dz. U. Nr 283, poz. 2842)