STATYSTYKA W POMIARACH AKUSTYCZNYCH - PODSTAWY

mgr Mikołaj KIRPLUK

NTL-M.Kirpluk

00-761 Warszawa, ul.Belwederska 3 m.6

www.ntlmk.com

tel.k.: 502 216620

e-mail: mkirpluk@ntlmk.com

1. WSTĘP

W związku z szeregiem wymagań stawianych m.in. przez przepisy prawne zachodzi konieczność określania **niepewności wyników badania hałasu** na podstawie wykonanych pomiarów poziomu dźwięku.

Skoncentruję się tu na aspekcie **fizycznym** tego zagadnienia, pomijając inne aspekty (prawne, faktycznej jakości badań, sensu akredytacji w pomiarach środowiskowych, a hałasu w szczególności - to temat na osobne dyskusje, do prowadzenia których niezbędne jednak jest zrozumienie fizycznej strony zjawiska hałasu, pomiaru poziomu dźwięku oraz statystyki).

Chociaż już ogół osób zajmujących się sprawami hałasu określa **wartość średnią poziomu dźwięku** jako „średnią logarytmiczną" (szczegółowe wyjaśnienie tego pojęcia dalej w treści referatu) **zgodnie z energetycznym charakterem tego zjawiska**, to dalsze rachunki „statystyczne" wielu wykonuje jednak na... poziomach dźwięku!
Jest to „cyferkologia stosowana"...

Żeby zrozumieć źródło takiego błędu trzeba uświadomić sobie genezę pojęć i wzorów statystycznych oraz stosowanych w akustyce definicji m.in. właśnie *poziomu dźwięku*.

Rozdział pt. „Repetytorium" stanowi skrót podstawowych informacji na temat parametrów rozkładów statystycznych i pojęć uzywanych w określaniu niepewności.

Natomiast meritum mojego referatu znajduje się w rozdziale „Statystyka w pomiarach akustycznych" i jest zakończone brzemienną w skutki „Konkluzją", z której wnioskować można o jakości wydanych dotychczas akredytacji i przepisów prawa... (stan na dzień 3.03.2006r.)

2. REPETYTORIUM

2.1. Parametry rozkładu zmiennych losowych

***Wartość oczekiwana* zmiennej losowej X** (*wartość przeciętna, nadzieja matematyczna*)

- dla zmiennej losowej dyskretnej:

$$E(X) = \sum_k x_k \cdot P\{X = x_k\}$$

- dla zmiennej losowej ciągłej:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x)dx$$

gdzie: $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$

***Moment rzędu n* zmiennej losowej X** to wartość oczekiwana zmiennej losowej $\mathbf{X^n}$, czyli:

- dla zmiennej losowej dyskretnej:

$$E(X^n) = \sum_k x_k^n \cdot P\{X = x_k\}$$

- dla zmiennej losowej ciągłej:

$$E(X^n) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^n \cdot f(x)dx$$

***Wariancja* zmiennej losowej X** jest określona zależnością:

$$D^2(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

Pierwiastek kwadratowy z *wariancji* nazywamy ***odchyleniem standardowym***.

2.2. Przypadki szczególne

A. Średnia arytmetyczna to wartość oczekiwana zmiennej losowej dyskretnej o jednakowych prawdopodobieństwach dla skończonej liczby możliwych wartości:

$$E(X)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$$

Dla średniej arytmetycznej ***wariancja*** wyraża się wzorem:

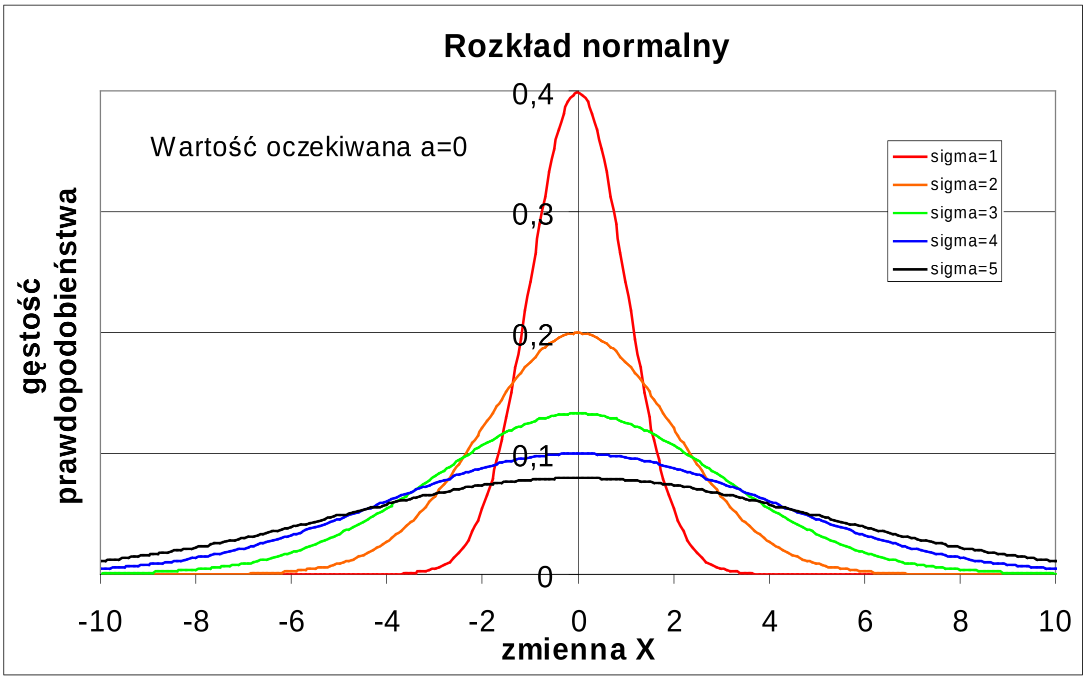
$$D^2(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2-\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\right)^2=(\ldots)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}[X_i-E(X)]^2$$

i jest to *moment centralny 2-rzędu*, *lub* wartość oczekiwana *kwadratu odchylenia zmiennej losowej od jej wartości oczekiwanej*, czyli ***średnie odchylenie kwadratowe*** [6] (lub *średni błąd kwadratowy* [1]) - takie nazewnictwo jest prawidłowe (przyp.MK), a pierwiastek kwadratowy z tej wariancji to ***odchylenie standardowe***, ale też średnia kwadratowa odchylenia lub ***dyspersja*** [2].

B. Rozkład normalny zmiennej losowej X to rozkład o gęstości prawdopodobieństwa określonej wzorem:

$$f(x;a,s)=\frac{1}{s\cdot\sqrt{2p}}\exp\left(-\frac{(x-a)^2}{2s^2}\right)$$

gdzie:
a - badana wielkość lub wartość oczekiwana
σ - odchylenie standardowe



2.3. Niepewność [2,3]

- **niepewność rozszerzona** - U_R:

  (*zasada propagacji niepewności*)

$$U_R = \sqrt{U_A^2 + U_B^2}$$

Niepewność możemy określać z różnym poziomem ufności, wyrażanym zazwyczaj w procentach, oznaczającym prawdopodobieństwo uzyskania wyniku leżącego w pobliżu wartości oczekiwanej w przedziale zdefiniowanym przez tą niepewność, np.:

$$P\left\{ X \in \underbrace{\left(E(X) - U_{R,95},\ E(X) + U_{R,95}\right)}_{przedzial\ niepewnosci} \right\} = 95\%$$

- **niepewność typu A** - U_A

  możemy ją określać metodami statystyki matematycznej,

  dotyczy głównie wyników pomiarów traktowanych jako zmienne losowe:

  - niezależne,

  - powtarzalne,

  - pomiar nie wpływa na wynik.

- **niepewność typu B** - U_B

  określamy ją metodami innymi niż statystyki matematycznej, np:

  - metryki, certyfikaty,

  - dane literaturowe,

  - wcześniej uzyskane dane pomiarowe,

  - własne doświadczenie i wiedza,

  - **szczegółowa znajomość badanych zjawisk.**

  „Szacowanie niepewności typu B to bardziej sztuka doświadczalna niż rzemiosło” [2]

3. STATYSTYKA W POMIARACH AKUSTYCZNYCH

Średni poziom dźwięku (dla jednakowo prawdopodobnych zdarzeń / pomiarów) obliczamy jako tzw. „średnią logarytmiczną” określoną wzorem:

$$L_{śr.} = 10 \cdot \log_{10}\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} 10^{\frac{L_i}{10}}\right] \qquad [A]$$

Definicja poziomu dźwięku

Poziom dźwięku wyrażony w decybelach to 10 logarytmów dziesiętnych ze stosunku kwadratu ciśnienia akustycznego do kwadratu ciśnienia odniesienia równego 2*10^{-5} Pa:

$$L_p = 10 \cdot \log_{10}\frac{p^2}{p_0^2},\ \ dB \qquad [B]$$

gdzie: p_0 - ciśnienie odniesienia 2*10^{-5} Pa (próg słyszenia dla 1000 Hz)

UWAGA 1:

Często w literaturze spotyka się zapis:

$$L_p = 20 \cdot \log_{10}\frac{p}{p_0},\ \ dB$$

Zapis taki, choć z formalnie prawidłowy z matematycznego punktu widzenia, **traci sens fizyczny**:

- w fizycznej definicji *poziomu* wyrażanego w decybelach - wielkości logarytmizowane muszą być proporcjonalne do energii - w akustyce taką wielkością jest kwadrat ciśnienia akustycznego,
- ciśnienie akustyczne (chwilowe?) w pierwszej potędze może być ujemne i wychodzi poza dziedzinę logarytmu.

Stąd próba obliczeń, np. sumy hałasu z kilku źródeł (sumowanie poziomów) lub niepewności wyników (przez różniczkowanie) prowadzi do błędów interpretacyjnych!

Przekształcając wzory [A] i [B] otrzymujemy:

$$\frac{p_{śr.}^2}{p_0^2} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{p_i^2}{p_0^2}$$

czyli **wartość oczekiwaną** dla wielkości $\mathbf{p^2/p_0^2}$ - ekspozycji względnej - określoną wzorem dla którego jest stworzony cały statystyczny aparat matematyczny!

W dalszych rachunkach ekspozycję względną, rozumianą jako wielkość $\mathbf{p^2/p_0^2}$, będę oznaczał przez **X** i traktował jako zmienną losową opisującą zdarzenia akustyczne:

$$X_{śr.} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

Ekspozycja X jest proporcjonalna do energii fali akustycznej, jest addytywna i można oczekiwać, że jej rozkład będzie miał charakter rozkładu normalnego wokół wartości średniej.

Dla opisu takiej wielkości można stosować parametry statystyczne wyprowadzane ze wzorów na wartość oczekiwaną.

UWAGA 2:

Natomiast w przypadku poziomów dźwięku sytuacja wygląda zgoła inaczej:

<u>Poziom dźwięku nie jest wielkością fizyczną</u> - jest umowną reprezentacją wielkości fizycznej przy wykorzystaniu funkcji logarytmicznej ze wszelkimi tego konsekwencjami:

- nie jest addytywny - nie dodaje się algebraicznie - sumowanie poziomów polega na sumowaniu energii („suma logarytmiczna” poziomów),
- różnica poziomów jest krotnością - jest to różnica logarytmów! - i chociaż jest stosowana jako wskaźnik skuteczności akustycznej (np. dźwiękoizolacyjności, wyciszenia), to liczenie „wariancji” na różnicach poziomów nie ma sensu fizycznego,
- poziom dźwięku nie reprezentuje wartości „zerowej” - odpowiadającej braku emisji energii (wartość poziomu dąży do $-\infty$).

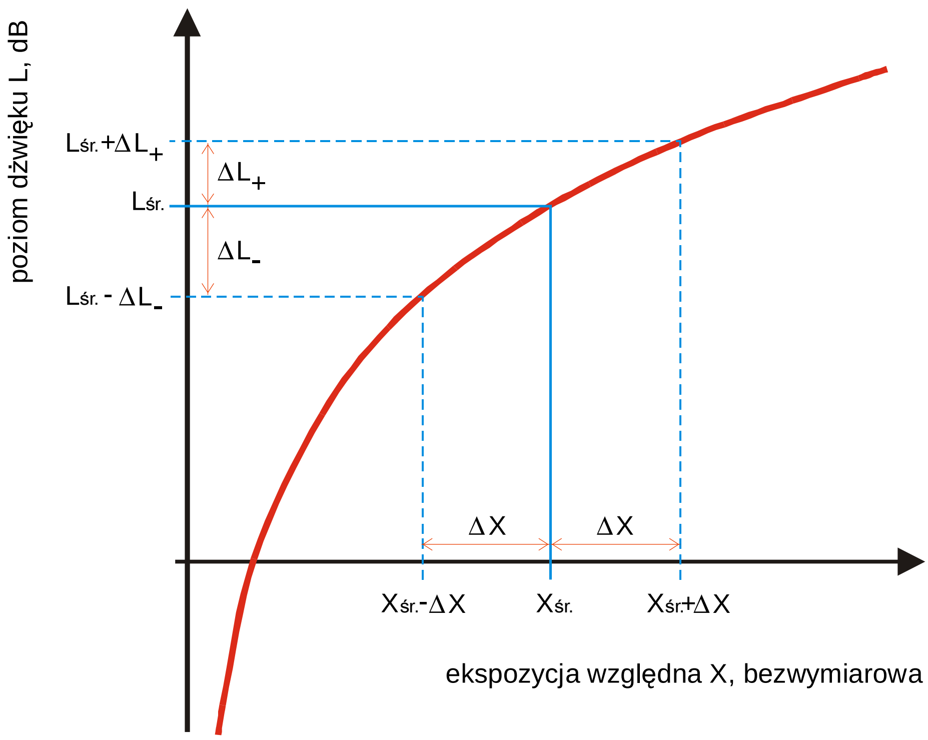
Oczywiście, aby dalej badać zjawiska akustyczne i określać dla nich parametry statystyczne, trzeba zapewnić spełnienie innych warunków stosowania statystyki:

- zdarzenia akustyczne powinny być ***niezależne*** - stąd należy mierzyć całe cykle jako zdarzenie akustyczne (np. cykl = wjazd + manewry + wyjazd pojazdu),
- zdarzenia akustyczne powinny być ***powtarzalne*** - należy uwzględniać czynniki mające wpływ na przebieg badanego zdarzenia poprzez prawidłowe określenie modelu zjawiska - błędem jest np. badanie statystyczne hałasu komunikacyjnego w czasie narastania natężenia ruchu pomiędzy kolejnymi pomiarami lub podczas blokowania pasa ruchu spowodowanego awarią pojazdu,
- badanie ***nie powinno wpływać na przebieg*** zdarzenia akustycznego - np. ustawienie punktu pomiarowego zbyt blisko jezdni w polu widzenia kierowcy nadjeżdżającego pojazdu powoduje jego reakcję (na ogół zmniejszenie prędkości...).

4. KONKLUZJA

Konsekwencją określenia średniej wartości ekspozycji względnej $X_{śr.}$ z niepewnością $\pm\Delta_X$, czyli przedziału ufności dla ekspozycji względnej [$X_{śr.}$-ΔX, $X_{śr.}$+ ΔX], jest przedział ufności dla poziomów dźwięku [$10\log_{10}(X_{śr.}$- ΔX), $10\log_{10}(X_{śr.}$+ΔX)] równy przedziałowi [$L_{śr.}$-ΔL_-, $L_{śr.}$+ΔL_+], gdzie wartość oczekiwana poziomu dźwięku $L_{śr.}=10\log_{10}(X_{śr.})$ leży niesymetrycznie wewnątrz tego przedziału (bliżej wartości górnej), stąd wartość średnia poziomu dźwięku podawana wraz z niepewnością musi mieć <u>niesymetryczne</u> wartości niepewności:

$L_{śr.}$ (+D_{L+}; -D_{L-})



Wartości niepewności dla poziomów - „plus” i „minus” - są dla takiego rachunku ściśle ze sobą powiązane:

+ΔL_+	-ΔL_-	$\Delta L_{-} = 10\cdot\log_{10}\left(2-10^{\frac{\Delta L_{+}}{10}}\right)$
0,10	-0,10	granica stosowalności przybliżeń liniowych !
0,25	-0,27	asymetria wartości niepewności
0,81	-1,00	
1,00	-1,30	
1,65	**-2,70**	
2,00	-3,82	
2,70	-8,60	dolne granice są już nieinterpretowalne !
3,00	-23,24	

Na koniec uwaga praktyczna:

- jeśli w czasie pomiarów obserwujemy zbyt wielki rozrzut wyników (rzędu kilku decybeli), to na pewno nie wiemy co mierzymy!

  Zastosowanie statystyki do takich wyników nie da nam żadnej odkrywczej informacji, poza unaocznieniem faktu, że wyciąganie średniej z takich wyników jest obarczone kolosalnym błędem.

Jest też istotna pozytywna konsekwencja prowadzenia dalszych rachunków niepewności na ekspozycjach względnych - ponieważ ekspozycja jest addytywna, to wszelkie wzory się wyjątkowo upraszczają i liczenie różniczek jest już *„trywialne”*[1]...

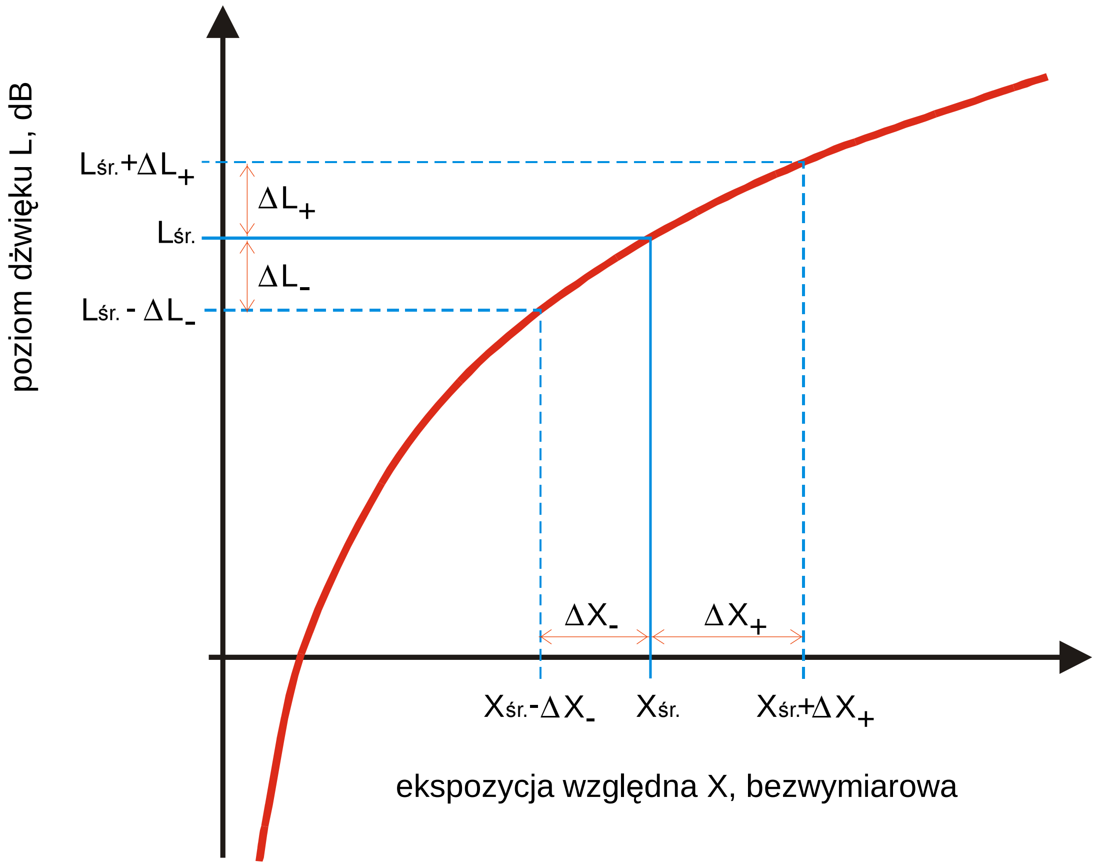
LITERATURA:

1. I.N.Bronsztejn, K.A.Siemiendiajew, „Matematyka - Poradnik encyklopedyczny”, PWN, Warszawa 1976
2. Roman Nowak, „Statystyka dla fizyków”, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2002, ISBN 83-01-13702-9
3. „Wyrażanie niepewności pomiaru. Przewodnik.”, GUM, 1999, ISBN 83-906546-1-x
4. „Tablice matematyczne”, Wydawnictwo Adamantan, Warszawa 2004, ISBN 83-7350-048-0
5. Polska Norma PN-83/B-02154/02 - *„Akustyka budowlana. Pomiary izolacyjności akustycznej w budynkach i izolacyjności akustycznej elementów budowlanych. Ustalenia dotyczące dokładności.*”
6. T.Gerstenkorn, T.Śródka, „Kombinatoryka i rachunek prawdopodobieństwa”, PWN, Warszawa 1972, ISBN 83-01-00204-2

[1] *trivium* - niższy stopień nauki szkolnej w średniowieczu, obejmujący studium trzech przedmiotów (gramatyki, retoryki i dialektyki), wchodzących w skład sztuk wyzwolonych (Słownik wyrazów obcych, WN PWN S.A., Warszawa 2000)

Dodatek - niepewności typu B

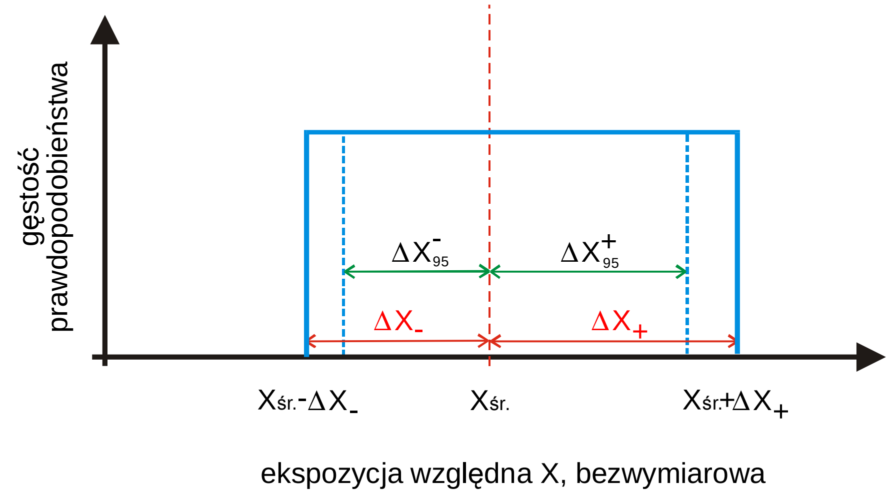
Co zrobić dla rachunku na wielkościach X, gdy mamy dane symetryczne granice błędów dla poziomu L ?



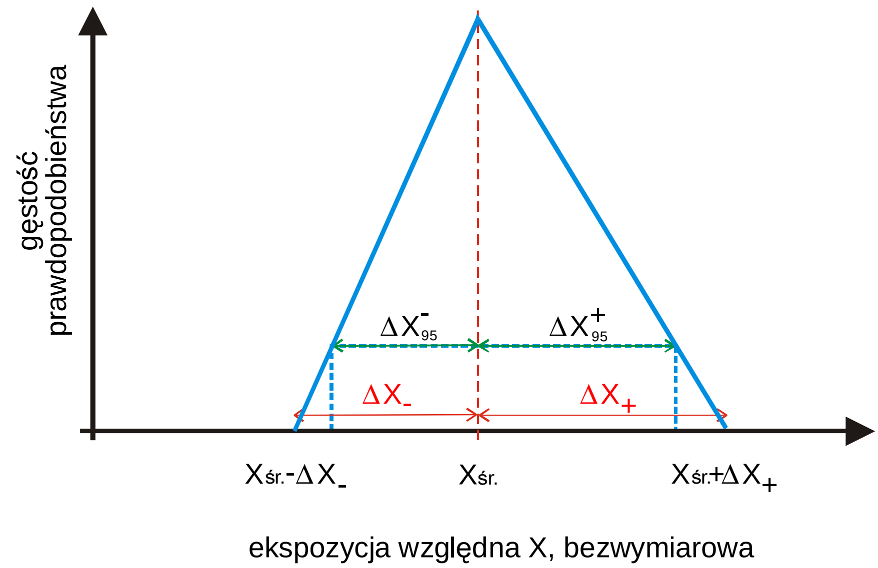
$$\Delta X_{+} = 10^{\frac{L_{śr.}+\Delta L_{+}}{10}} - 10^{\frac{L_{śr.}}{10}} = 10^{\frac{L_{śr.}}{10}} \cdot \left(10^{\frac{\Delta L_{+}}{10}} - 1\right)$$

$$\Delta X_{-} = 10^{\frac{L_{śr.}}{10}} - 10^{\frac{L_{śr.}-\Delta L_{-}}{10}} = 10^{\frac{L_{śr.}}{10}} \cdot \left(1 - 10^{\frac{\Delta L_{-}}{10}}\right)$$

$$\Delta L_{+} = \Delta L_{-} = \Delta L \quad \Rightarrow \quad \Delta X_{-} = \Delta X_{+} \cdot 10^{\frac{-\Delta L}{10}}$$



$$
(\Delta L_+ = \Delta L_- = \Delta L) \Rightarrow \begin{cases} \Delta X^+_{95} = 10^{\frac{L_{śr.}}{10}} \cdot \left(10^{\frac{\Delta L}{10}} - 1\right) \cdot 0{,}95 \\ \Delta X^-_{95} = \Delta X^+_{95} \cdot 10^{\frac{-\Delta L}{10}} \end{cases}
$$



$$
(\Delta L_+ = \Delta L_- = \Delta L) \Rightarrow \begin{cases} \Delta X^+_{95} = 10^{\frac{L_{śr.}}{10}} \cdot \left(10^{\frac{\Delta L}{10}} - 1\right) \cdot \underbrace{\left(1 - \frac{\sqrt{5}}{10}\right)}_{\approx 0{,}767} \\ \Delta X^-_{95} = \Delta X^+_{95} \cdot 10^{\frac{-\Delta L}{10}} \end{cases}
$$