SZACOWANIE NIEPEWNOŚCI PRZY POMIARZE I OKREŚLANIU POZIOMU RÓWNOWAŻNEGO

mgr Mikołaj KIRPLUK
NTL-M.Kirpluk
00-761 Warszawa, ul.Belwederska 3 m.6
www.ntlmk.com
tel.k.: 502 216620
e-mail: mkirpluk@ntlmk.com

1. WSTĘP

Niniejszy referat stanowi kontynuację poprzednio wykonanej pracy [7] dotyczącej prawidłowego sposobu określania **niepewności wyników badania hałasu** na podstawie wykonanych pomiarów poziomu dźwięku.

Skupiam się tym razem na dwóch zagadnieniach związanych z określaniem niepewności obliczanego / mierzonego **równoważnego poziomu dźwięku**:

- wpływem wybranej statystyki pomiarów krótkookresowych, w zależności od czasu pomiaru (mniejszego od normatywnego czasu obserwacji) na niepewność wyniku końcowego,
- oszacowaniem niepewności określenia poziomu równoważnego z czasu pomiaru, wykonywanego metodą pomiaru ciągłego aż do momentu ustabilizowania się wyniku według zadanych kryteriów obserwacji.

Dla osób nieznających mojego poprzedniego artykułu, jak i dla przypomnienia podstawowych informacji - zamieściłem w rozdziale 2 „Repetytorium" podstawowe informacje nt. statystyki oraz niepewności, a w rozdziale 3 - przypominam podstawy zastosowania statystyki w obliczeniach akustycznych.

Główny temat niniejszego referatu zaczyna się od rozdziału 4.

2. REPETYTORIUM

2.1. Parametry rozkładu zmiennych losowych

Wartość oczekiwana **zmiennej losowej X** (*wartość przeciętna*, *nadzieja matematyczna*)

- dla zmiennej losowej dyskretnej:

$$E(X) = \sum_k x_k \cdot P\{X = x_k\}$$

- dla zmiennej losowej ciągłej:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x) dx$$

Moment rzędu n **zmiennej losowej X** to wartość oczekiwana zmiennej losowej $\mathbf{X^n}$, czyli:

- dla zmiennej losowej dyskretnej:

$$E(X^n) = \sum_k x_k^n \cdot P\{X = x_k\}$$

- dla zmiennej losowej ciągłej:

$$E(X^n) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^n \cdot f(x) dx$$

Moment centralny rzędu n **zmiennej losowej X** to wartość oczekiwana zmiennej losowej $\mathbf{(X\text{-}E(X))^n}$, czyli:

- dla zmiennej losowej dyskretnej:

$$E\left((X - E(X))^n\right) = \sum_k (x_k - E(X))^n \cdot P\{X = x_k\}$$

- dla zmiennej losowej ciągłej:

$$E\left((X - E(X))^n\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - E(X))^n \cdot f(x) dx$$

Wariancja **zmiennej losowej X** jest określona zależnością:

$$D^2(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

Pierwiastek kwadratowy z *wariancji* nazywamy ***odchyleniem standardowym*** (w populacji).

2.2. Przypadki szczególne

A . Średnia arytmetyczna to wartość oczekiwana zmiennej losowej dyskretnej o jednakowych prawdopodobieństwach dla skończonej liczby możliwych wartości:

$$E(X) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

Dla średniej arytmetycznej ***wariancja*** wyraża się wzorem:

$$D^2(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right)^2 = (...) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}[X_i - E(X)]^2$$

i jest to wartość oczekiwana *kwadratu odchylenia zmiennej losowej od jej wartości oczekiwanej*, czyli *moment centralny drugiego rzędu* lub ***średnie odchylenie kwadratowe*** [6] lub *średni błąd kwadratowy* [1] - takie nazewnictwo jest prawidłowe (przyp.MK), a pierwiastek kwadratowy z tej wariancji to: średnia kwadratowa odchylenia, ale też ***odchylenie standardowe*** (w populacji) lub ***dyspersja*** [2].

B. Ważona średnia arytmetyczna to wartość oczekiwana zmiennej losowej dyskretnej o jednakowych prawdopodobieństwach dla skończonej liczby możliwych wartości:

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} P(X_i) \cdot X_i$$

Gdzie $P(X_i)$ to wagi znormalizowane do 1 (czyli prawdopodobieństwa).

Dla ważonej średniej arytmetycznej ***wariancja*** wyraża się wzorem:

$$D^2(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \sum_{i=1}^{n} P(X_i) \cdot X_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} P(X_i) \cdot X_i\right)^2 = ...i\_koniec\_na\_tym\_!$$

W ogólnym przypadku nie ma analitycznego rozwinięcia powyższego wzoru!
A zatem *wariancja* (i dalej *odchylenie standardowe* jako pierwiastek z niej) już <u>nie mogą</u> być liczone jako *średnie odchylenie kwadratowe*!

2.3. Niepewność

- **niepewność rozszerzona** - U_R:

  (*zasada propagacji niepewności*)

$$U_R = \sqrt{U_A^2 + U_B^2}$$

Niepewność możemy określać z różnym poziomem ufności, wyrażanym zazwyczaj w procentach, oznaczającym prawdopodobieństwo uzyskania wyniku leżącego w pobliżu wartości oczekiwanej w przedziale zdefiniowanym przez tą niepewność, np.:

$$P\left\{ X \in \underbrace{\left(E(X) - U_{R,95}, E(X) + U_{R,95}\right)}_{przedzial\ niepewnosci} \right\} = 95\%$$

- **niepewność typu A** - U_A

  możemy ją określać metodami statystyki matematycznej,

  dotyczy głównie wyników pomiarów traktowanych jako zmienne losowe:

  - niezależne,
  - powtarzalne,
  - pomiar nie wpływa na wynik.

- **niepewność typu B** - U_B

  określamy ją metodami innymi niż statystyki matematycznej, np:

  - metryki, certyfikaty,
  - dane literaturowe,
  - wcześniej uzyskane dane pomiarowe,
  - własne doświadczenie i wiedza,
  - **szczegółowa znajomość badanych zjawisk.**

  „*Szacowanie niepewności typu B to bardziej sztuka doświadczalna niż rzemiosło*” [2]

3. STATYSTYKA W POMIARACH AKUSTYCZNYCH

3.1. Zdarzenia statystyczne w akustyce

Aby badać zjawiska akustyczne i określać dla nich parametry statystyczne, trzeba zdefiniować zdarzenia statystyczne, dla których muszą być spełnione warunki stosowania statystyki:

- zdarzenia akustyczne powinny być *niezależne* - stąd należy mierzyć całe cykle jako zdarzenie akustyczne (np. cykl = wjazd + manewry + wyjazd pojazdu),
- zdarzenia akustyczne powinny być *powtarzalne* - należy uwzględniać czynniki mające wpływ na przebieg badanego zdarzenia poprzez prawidłowe określenie modelu zjawiska - błędem jest np. badanie statystyczne hałasu komunikacyjnego w czasie narastania natężenia ruchu pomiędzy kolejnymi pomiarami lub podczas blokowania pasa ruchu spowodowanego awarią pojazdu,
- badanie *nie powinno wpływać na przebieg* zdarzenia akustycznego - np. ustawienie punktu pomiarowego zbyt blisko jezdni w polu widzenia kierowcy nadjeżdżającego pojazdu powoduje jego reakcję (na ogół zmniejszenie prędkości...).

UWAGA 1:

<u>Nie należy mylić</u> **histogramów rozkładu statystycznego** wyników pomiarów odczytywanych z mierników poziomu dźwięku ze **statystyką badanego zjawiska** !

Histogram poziomów statystycznych określa jaki jest udział w czasie obserwacji (pomiaru) poziomów dźwięku o wartościach pomiędzy zadanymi rozdzielczością statystyki (np. co 0,1 dB lub co 1 dB) - jest to statystyka *zmierzonych poziomów*.

Na przykład: dla pojedynczego przejazdu samochodu będą to poziomy mierzone co 1s - poziom o wartości maksymalnej wystąpi jeden raz, a poziomy niższe (w przypadku idealnym) - po dwa razy. Uzyskujemy z takiego pomiaru jakiś rozkład statystyczny zmierzonych *poziomów dźwięku* dla pojedynczego przejazdu, który dopiero sam w sobie jest **jednym zdarzeniem akustycznym**!.

3.2. Poziom średni (energetyczna średnia arytmetyczna)

Średni poziom dźwięku (dla jednakowo prawdopodobnych zdarzeń / pomiarów) obliczamy jako tzw. „średnią logarytmiczną" określoną wzorem:

$$L_{śr.} = 10 \cdot \log_{10}\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} 10^{\frac{L_i}{10}}\right] \qquad \text{[A]}$$

Definicja poziomu dźwięku

Poziom dźwięku wyrażony w decybelach to 10 logarytmów dziesiętnych ze stosunku kwadratu ciśnienia akustycznego do kwadratu ciśnienia odniesienia równego $2*10^{-5}$ Pa:

$$L_p = 10 \cdot \log_{10}\frac{p^2}{p_0^2}, \ dB \qquad \text{[B]}$$

gdzie: p_0 - ciśnienie odniesienia $2*10^{-5}$ Pa (próg słyszenia dla 1000 Hz)

Przekształcając wzory [A] i [B] otrzymujemy:

$$\frac{p_{śr.}^2}{p_0^2} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{p_i^2}{p_0^2}$$

czyli **wartość oczekiwaną** dla wielkości $\mathbf{p^2/p_0^2}$ - ekspozycji względnej - <u>określoną wzorem dla średniej arytmetycznej - dla której jest stworzony cały statystyczny aparat matematyczny</u>!

W dalszych rachunkach ekspozycję względną, rozumianą jako wielkość $\mathbf{p^2/p_0^2}$, będę oznaczał przez **E** (nie mylić z wartością oczekiwaną *E(X)* w poprzednich rozdziałach!) i traktował jako zmienną losową opisującą zdarzenia akustyczne:

$$E_{śr.} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E_i \qquad \text{[C]}$$

Ekspozycja **E** jest proporcjonalna do energii fali akustycznej, jest addytywna i można oczekiwać, że jej rozkład będzie miał charakter rozkładu normalnego wokół wartości średniej.

Dla opisu takiej wielkości można stosować parametry statystyczne wyprowadzane ze wzorów na wartość oczekiwaną.

UWAGA 2:

Poziom dźwięku nie jest wielkością fizyczną - jest umowną reprezentacją wielkości fizycznej przy wykorzystaniu funkcji logarytmicznej ze wszelkimi tego konsekwencjami:

- nie jest addytywny - nie dodaje się algebraicznie - sumowanie poziomów polega na sumowaniu energii („suma logarytmiczna" poziomów),
- różnica poziomów jest krotnością - jest to różnica logarytmów! - i chociaż jest stosowana jako wskaźnik skuteczności akustycznej (np. dźwiękoizolacyjności, wyciszenia), to liczenie „wariancji" na różnicach poziomów nie ma sensu fizycznego,
- poziom dźwięku nie reprezentuje wartości „zerowej" - odpowiadającej braku emisji energii (wartość poziomu dąży do $-\infty$).

3.3. Poziom równoważny (energetyczna średnia ważona)

Średni poziom dźwięku obliczamy jako tzw. „średnią logarytmiczną" określoną wzorem:

$$L_{śr.} = 10 \cdot \log_{10}\left[\frac{1}{\sum_{i=1}^{n} T_i} \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} T_i \cdot 10^{\frac{L_i}{10}}\right)\right] \qquad [D]$$

W wielkościach energetycznych, jako równoważna ekspozycja:

$$E_{śr.} = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} T_i} \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} T_i \cdot E_i\right) \qquad [E]$$

Odchylenie standardowe dla ekspozycji równoważnej:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\frac{1}{T}\sum_{i=1}^{n} T_i \cdot E_i^2 - \left(\frac{1}{T}\sum_{i=1}^{n} T_i \cdot E_i\right)^2}{n}} \qquad [F]$$

gdzie:

$$T = \sum_{i=1}^{n} T_i$$

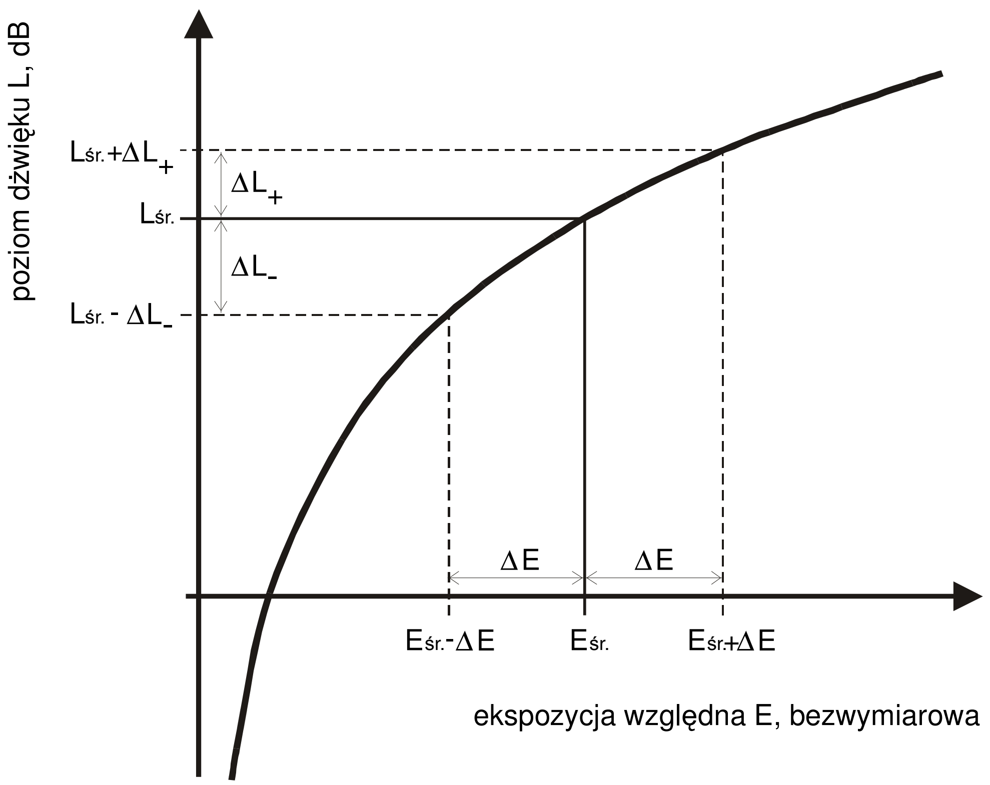
3.4. Przedział niepewności

Dopiero przy określaniu przedziału niepewności przy wybranym poziomie ufności, np.95%, decydujemy się na przyjęcie jakiegoś modelu rozkładu - w domyśle, ze względu na dalsze rachunki i stosowane wzory - jest to rozkład normalny (dla ekspozycji względnych!).

Zgodnie z „*Przewodnikiem...*”[3] możemy niepewność dla poziomu ufności 95% określić jako **2σ** w każdą stroną (przedział obustronny) lub skorzystać z rozkładu t-Studenta dla zadanej liczby prób (stopni swobody) i przyjętego poziomu istotności.

Konsekwencją określenia średniej wartości ekspozycji względnej $E_{śr.}$ z niepewnością symetryczną $\pm \Delta E$, czyli przedziału ufności dla ekspozycji względnej $[E_{śr.}-\Delta E, E_{śr.}+ \Delta E]$, jest przedział ufności dla poziomów dźwięku $[10\log_{10}(E_{śr.}- \Delta E), 10\log_{10}(E_{śr.}+\Delta E)]$ równy przedziałowi $[L_{śr.}-\Delta L_{-}, L_{śr.}+\Delta L_{+}]$, gdzie wartość oczekiwana poziomu dźwięku $L_{śr.}=10\log_{10}(E_{śr.})$ leży niesymetrycznie wewnątrz tego przedziału (bliżej wartości górnej), stąd wartość średnia poziomu dźwięku podawana wraz z niepewnością musi mieć <u>niesymetryczne</u> wartości niepewności:

$$\mathbf{L_{śr.} (+\Delta L_{+}; -\Delta L-)}$$



4. NIEPEWNOŚĆ POZIOMU RÓWNOWAŻNEGO

4.1. Wpływ wybranej statystyki pomiarowej

Wykonajmy obliczenia dla tego samego zarejestrowanego sygnału akustycznego (poziom równoważny z 3-godzinnego pomiaru wyniósł **65,4 dB** - dalej jest ten wynik przyjmowany jako warość dokładna w tym eksperymencie) przy różnych założeniach pomiarowych, tj. dla różnych czasów trwania pomiaru elementarnego - 1 minuta, 5 minut i 15 minut - wykresy na następnych stronach:

- Przypadek A - tyle samo pomiarów elementarnych - po 5 - o różnym czasie próbkowania,
- Przypadek B - pomiary elementarne o różnym czasie próbkowania wykonywane przez ten sam czas obserwacji, tj. 75 minut,

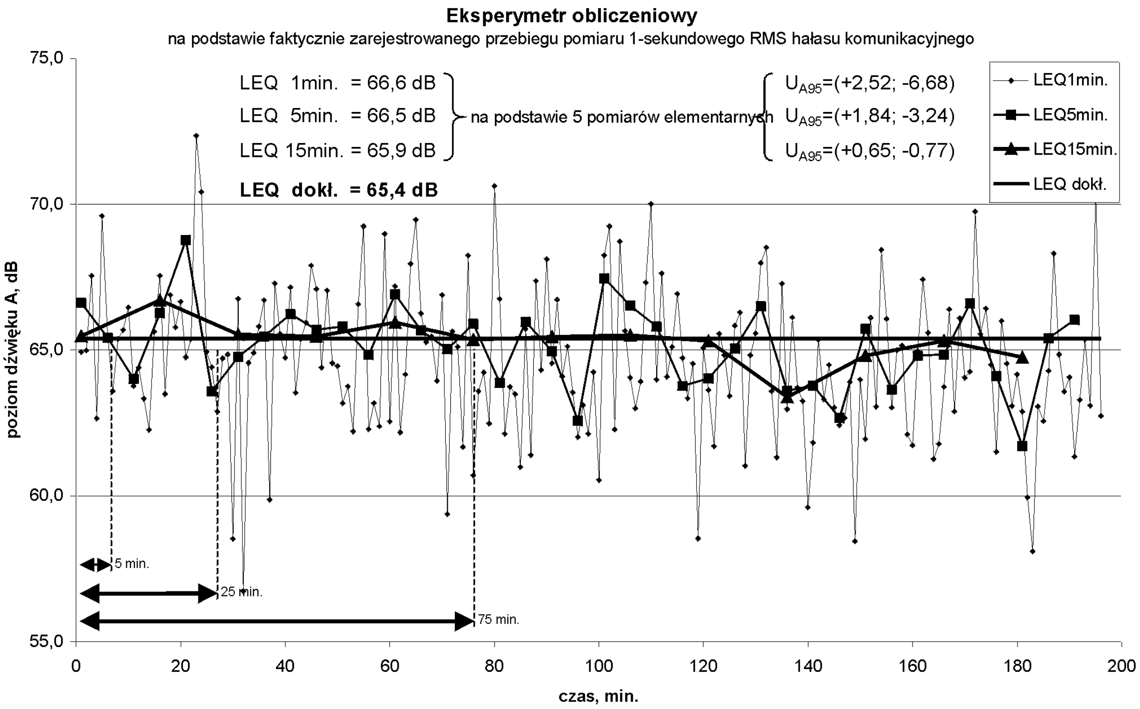
czas pomiaru elementar-nego	Przypadek A				Przypadek B			
	liczba próbek	czas pomiaru	poziom średni z pomiaru	zakres niepewności typu A 95%	liczba próbek	czas pomiaru	poziom średni z pomiaru	zakres niepewności typu A 95%
1 minuta	5	5 min.	66,6	+2,52; -6,68	75	75 min.	65,9	+0,62; -0,72
5 minut	5	25 min.	66,5	+1,84; -3,24	15	75 min.	65,9	+0,68; -0,80
15 minut	5	75 min.	65,9	+0,65; -0,77	5	75 min.	65,9	+0,65; -0,77
3 godz.	pomiar ciągły		65,4	wartość dokładna	pomiar ciągły		65,4	wartość dokładna

Jeżeli skrócimy czas pomiaru lub liczbę próbek, to oczywiście zakresy niepewności będą większe:

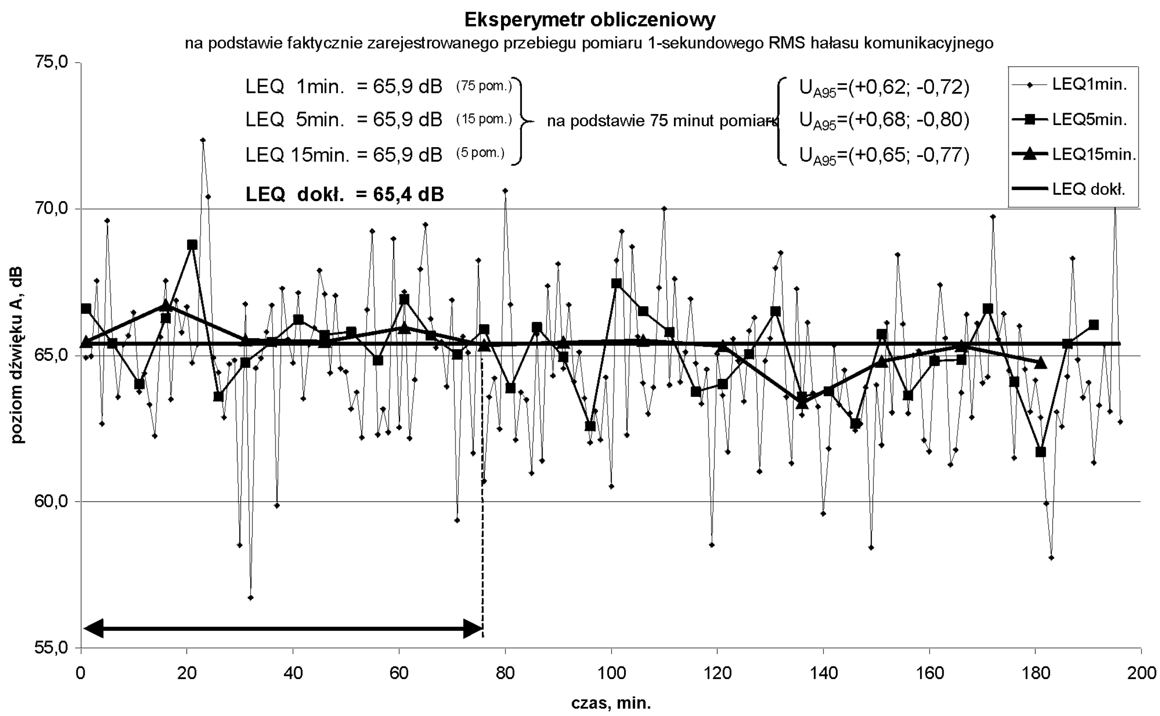
- Przypadek C - tyle samo pomiarów elementarnych - po 3 - o różnym czasie próbkowania,
- Przypadek D - pomiary elementarne o różnym czasie próbkowania wykonywane przez ten sam czas obserwacji, tj. 45 minut.

czas pomiaru elementar-nego	Przypadek C				Przypadek D			
	liczba próbek	czas pomiaru	poziom średni z pomiaru	zakres niepewności typu A 95%	liczba próbek	czas pomiaru	poziom średni z pomiaru	zakres niepewności typu A 95%
1 minuta	3	3 min.	66,0	+2,83; -10,9	45	45 min.	65,9	+0,83; -1,03
5 minut	3	15 min.	65,5	+2,37; -5,60	9	45 min.	65,9	+1,16; -1,59
15 minut	3	45 min.	65,9	+1,52; -2,35	3	45 min.	65,9	+1,52; -2,35
3 godz.	pomiar ciągły		65,4	wartość dokładna	pomiar ciągły		65,4	wartość dokładna

Przypadek A - tyle samo pomiarów elementarnych - po 5 - o różnym czasie próbkowania

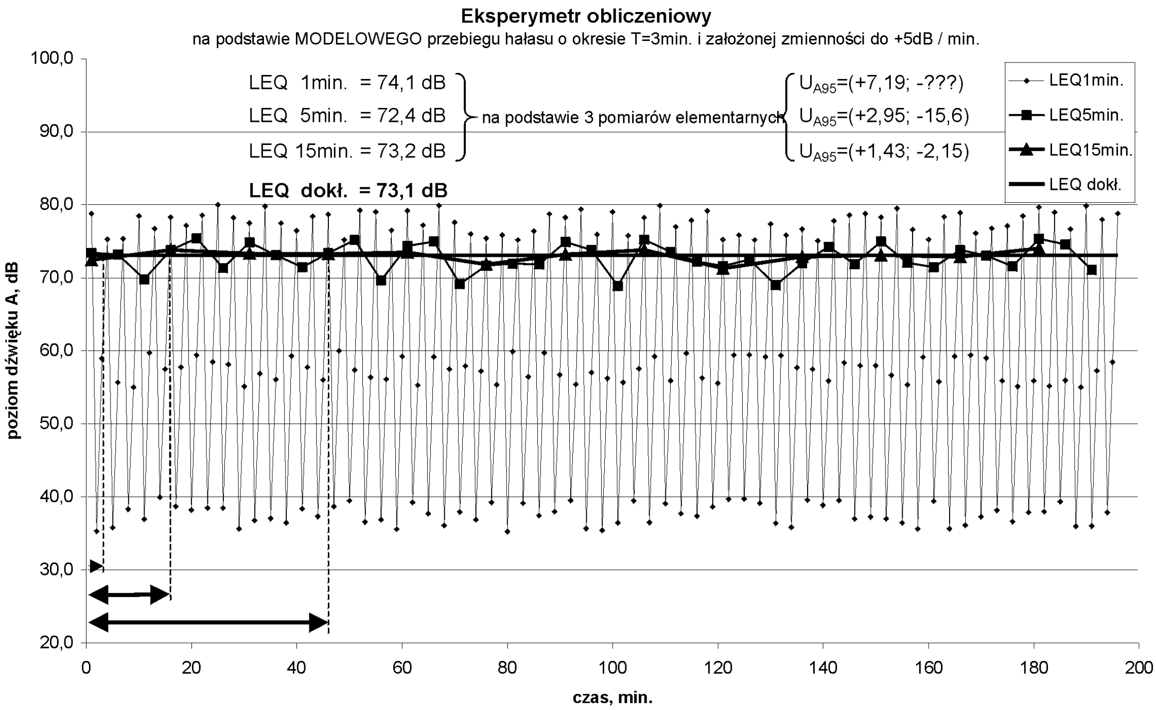


Przypadek B - pomiary elementarne o różnym czasie próbkowania wykonywane przez ten sam czas obserwacji, tj. 75 minut



Analogicznie wykonajmy obliczenia dla pewnego modelowanego sygnału o okresie T=3 minuty i następującej charakterystyce podstawowej:

- 1 minuta: 75 dB
- 2 minuta: 35 dB
- 3 minuta: 55 dB
- w każdej minucie poziom zmienia się losowo w zakresie + 0÷5 dB (generator liczb losowych)



I dla tego modelu również określmy 2 przypadki:

- Przypadek E - tyle samo pomiarów elementarnych - po 3 - o różnym czasie próbkowania,
- Przypadek F - pomiary elementarne o różnym czasie próbkowania wykonywane przez ten sam czas obserwacji, tj. 45 minut.

czas pomiaru elementar-nego	Przypadek E				Przypadek F			
	liczba próbek	czas pomiaru	poziom średni z pomiaru	zakres niepewności typu A 95%	liczba próbek	czas pomiaru	poziom średni z pomiaru	zakres niepewności typu A 95%
1 minuta	3	3 min.	74,1	+7,19; -∞	45	45 min.	73,2	+1,61; -2,58
5 minut	3	15 min.	72,4	+2,65; -15,6	9	45 min.	73,2	+1,12; -1,51
15 minut	3	45 min.	73,2	+1,43; -2,15	3	45 min.	73,2	+1,43; -2,15
3 godz.	pomiar ciągły		73,1	wartość dokładna	pomiar ciągły		73,1	wartość dokładna

Na podstawie przedstawionych wyników obliczeń obserwujemy natychmiast, co następuje:

- wykonanie kilku pomiarów elementarnych (min.3) od razu wskazuje, czy wybraliśmy właściwy czas pomiaru elementarnego - patrz np. zakres niepewności przy 3 minutowym czasie pomiaru dla przypadków C i E - można to powiązać z rozstępem wyników pomiarów elementarnych, niemniej jednak pomimo uzyskania w przypadku E wyniku tylko o 1 dB różnego od wyniku dokładnego (czysty przypadek!)[1], to czas obserwacji był ewidentnie za krótki do oceny zjawiska akustycznego o okresie podstawowym wynoszącym 3 minuty,
- pomimo, że dla tego samego czasu pomiaru (łącznego) przy podziale tego czasu na coraz krótsze czasowo odcinki elementarne i w związku z tym wzrost liczby pomiarów elementarnych - oczekiwałoby się, że zakresy niepewności będą proporcjonalnie maleć - to w pewnych sytuacjach, jak dla przypadku B, wiąże się to ze zwiększeniem jakby „rozdzielczości" widzenia zjawiska i zaobserwowane silniejsze odchylenia pogarszają statystykę - w przypadku B rozstęp (pomiędzy maksymalnym a minimalnym wynikiem pomiarów elementarnych) jest na tyle większy dla pomiarów 5-minutowych niż dla pomiarów 15-minutowych, że nieco większa liczba pomiarów elementarnych nie kompensuje tego faktu,
- statystyka zależy od wyboru czasu pomiaru elementarnego, ale jest „nieczuła" na jednostki czasu - jeżeli te same przebiegi odnieślibyśmy do sekund - to zależności liczbowe pozostają, wynika to m.in. ze sposobu określania energetycznej średniej arytmetycznej dla danego pomiaru (patrz wzór [C] w rozdziale 3.2.):

$$E_{śr.} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{1 \cdot t_i}{n \cdot t_i} \cdot E_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{t_i}{t_p} \cdot E_i = \frac{t_0}{t_p}\sum_{i=1}^{n} E_i$$

gdzie:

t_0 - czas pomiaru elementarnego

t_p - czas pomiaru (obserwacji zdarzeń): $t_p = n \times t_0$

[1] wynikający z faktu „rozpoczęcia" pomiaru od najbardziej energetycznej części modelowego cyklu, gdyby zacząć od najmniej energetycznego, to wynik wyniósłby 70,6 dB i byłby znacznie mniejszy od „dokładnego")

4.2. Określenie niepewności oszacowania poziomu równoważnego

Jak zobaczyliśmy w poprzednim podrozdziale - zmniejszenie niepewności poprzez wybranie własciwej (odpowiedniej) statystyki pomiarowej, polega na wybraniu dostatecznie długiego czasu pomiaru elementarnego (aby obejmował badane zjawisko, np. cykl, lub jego wielokrotność) i wykonaniu dostatecznie dużej liczby pomiarów (za czym idzie, oczywiście, wydłużenie samego czasu pomiaru jako sumy czasów pomiarów elementarnych).

I jeżeli jesteśmy w stanie udowodnić (lub przyjąć „na wiarę"), że czas faktycznie wykonanego pomiaru (czyli czas obserwacji - tu: pomiarowej, nie mylić z „normatywnym" czasem obserwacji, o którym dalej) odpowiada charakterystyce zjawiska w „normatywnym" czasie obserwacji (czyli: czasie obserwacji dla którego określamy poziom równoważny w celu porównania go z wartościami dopuszczalnymi określonymi w odpowiednich normach lub rozporządzeniach), to możemy badanie zakończyć.

Natomiast, jeżeli wiemy, że czas trwania badanego hałasu jest inny niż normatywny czas obserwacji (tu: krótszy, gdyż dla dłuższego przyjmujemy czas normatywny), to musimy skorzystać ze znanego wzoru na poziom równoważny (patrz wzór [D] w rozdz.3.3.) i wyprowadzić wzory na niepewność typu A dla ekspozycji względnej równoważnej danej sytuacji akustycznej:

$$U_{A,95}(E_{eq\_k}) = \sqrt{\left[\frac{t_k}{T} U_{A,95}(E_{em\_k})\right]^2 + \left[10^{0,1 \cdot L_{em\_k}} \cdot \frac{U_{A,95}(t_k)}{T}\right]^2}$$

gdzie:

$U_{A,95}(E_{em\_k})$	- niepewność określenia ekspozycji względnej emisji hałasu
$U_{A,95}(t_k)$	- niepewność określenia czasu trwania sytuacji akustycznej
t_k	- czas trwania sytuacji akustycznej
T	- normatywny czas dla określenia poziomu równoważnego

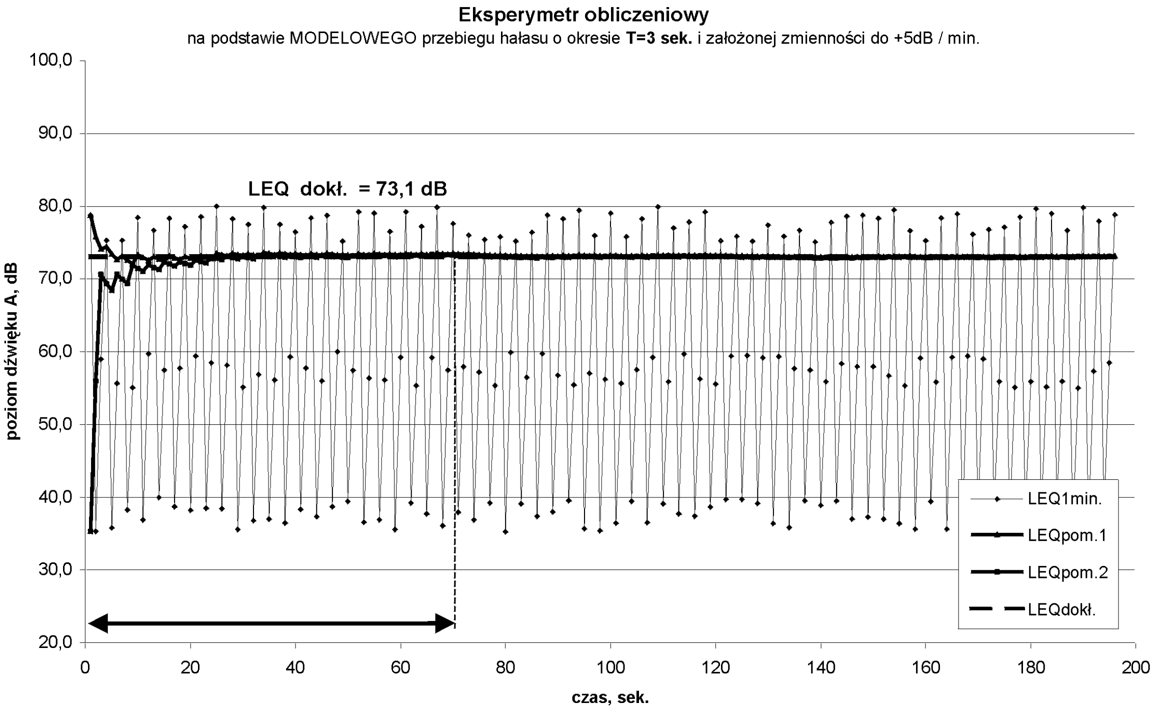
UWAGA: niepewność $U_{A,95}(t_k)$ określenia czasu trwania sytuacji akustycznej można np. określić metodą „prostokąta" dla wielkości granicznych i przyjąć zakres 95% tego czasu.

<u>Przedziały niepewności dla równoważnych poziomów dźwięku określamy zgodnie z procedurą opisana w rozdziale 3.4. na podstawie obliczonych niepewności dla ekspozycji względnych.</u>

4.3. Niepewność pomiaru ciągłego do czasu ustabilizowania wyniku

Korzystając z obserwacji z rozdz.4.1., że statystyka w modelu jest „nieczuła" na wybór jednostek czasu - przyjmijmy ten sam model zmiennego hałasu (i dla wygody - te same wartości poziomów dźwięku) tylko, że zamiast w „minutach" - nasze modelowe zjawisko będzie występowało w „sekundach".

Teraz zacznijmy wykonywać „pomiar" ciągły, „odczytując" co 1 sekundę wynik LEQ (zmnierzonego poziomu równoważnego - uśrednianego na bieżąco od momentu rozpoczęcia pomiaru - funkcja realizowana przez całkujące mierniki poziomu dźwięku):



UWAGA: na wykresie zaznaczono 2 pomiary wirtualne - pierwszy rozpoczynający się od maksymalnej wartości w 3-sekundowym cyklu pomiarowy, i drugi - rozpoczynający się od minimalnej wartości - co ładnie widać na wykresie jako rozbieżność wyników dla pierwszych sekund pomiaru.

Z wykresu widać, że dla naszego modelu, już po ok. 70 sekundach wynik jest ustabilizowany, czyli jego zmiany (wahania) są nie większe niż 0,1 dB na 1 sekundę wokół ustalonej wartości („ustabilizowanie" obserwujemy wówczas gdy zmiany są „w górę" i „w dół" - czyli wahania, natomiast jeżeli to byłyby zmiany w jednym kierunku, czyli jakiś trend, to oczywiście pomiar należy prowadzić dalej) i odczytujemy wynik LEQ = **73,2 dB**.

„*De facto*" wykonaliśmy „pomiar" obejmujący 45 jednostek czasu (tu: sekund).

Do dalszej analizy możemy przyjąć wyniki z rozdziału 4.1. przypadek F - liczbowe wartości niepewności będą te same.

Obserwujemy, że:

- otrzymaliśmy, oczywiście, taki sam wynik poziomu dźwięku, tj. 73,2 dB (pomiar trwał przez ten sam czas),
- analiza poziomów maksymalnych i minimalnych jest w zasadzie bezprzedmiotowa - zgodnie z założeniami naszego modelu poziom maksymalny mógł wynieść 80 dB, a poziom minimalny 35 dB (faktycznie wygenerowane poziomy użyte w modelu wyniosły odpowiednio 80,0 dB i 35,3 dB), w przypadkach rzeczywistych będzie jeszcze gorzej z interpretacją,
- co oznacza, w sensie statystycznym, wahanie wyniku poziomu równoważnego z czasu pomiaru o zadanych parametrach, czyli ±0,1 dB na 1 sekundę?

Policzmy:

$$\left|10 \cdot \lg(E_1) - 10 \cdot \lg(E_2)\right| \leq 0{,}1 dB$$

gdzie:

E_1 - średnia energia do momentu t_1

E_2 - średnia energia do momentu $t_2 = t_1 + 1s$

stąd ogólnie:

$$0{,}977 \leq \frac{E_1}{E_2} \leq 1{,}023$$

czyli zmiany energii (od początku pomiaru) są mniejsze niż 2,3% na 1 sekundę.

Zakładamy, że dla dostatecznie długiego pomiaru:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} \left[E_i - E_1\right]^2}{n \cdot (n-1)}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n+1} \left[E_i - E_2\right]^2}{(n+1) \cdot n}}$$

stąd:

$$(n+1)\cdot\sum_{i=1}^{n}\left[E_i - E_1\right]^2 = (n-1)\cdot\sum_{i=1}^{n+1}\left[E_i - E_2\right]^2$$

$$(n+1)\cdot\sum_{i=1}^{n}\left[E_i - E_1\right]^2 = (n-1)\cdot\left[\sum_{i=1}^{n}\left[E_i - E_2\right]^2 + \left(E_{n+1} - E_2\right)^2\right]$$

skądinąd: $E_{n+1} = (n+1)\cdot E_2 - n\cdot E_1$

$$(n+1)\cdot\sum_{i=1}^{n}\left[E_i - E_1\right]^2 = (n-1)\cdot\sum_{i=1}^{n}\left[E_i - E_2\right]^2 + (n-1)\cdot\left[(n+1)\cdot E_2 - n\cdot E_1 - E_2\right]^2$$

$$(n+1)\cdot\sum_{i=1}^{n}\left[E_i - E_1\right]^2 = (n-1)\cdot\sum_{i=1}^{n}\left[E_i - E_2\right]^2 + n^2\cdot(n-1)\cdot\left(E_2 - E_1\right)^2$$

wiemy już też, że dla naszych założeń: $E_2 = 1{,}023\cdot E_1 = E_1 + 0{,}023\cdot E_1$

$$(n+1)\cdot\sum_{i=1}^{n}\left[E_i - E_1\right]^2 =$$

$$= (n-1)\cdot\sum_{i=1}^{n}\left[\left(E_i - E_1\right)^2 - 2\cdot\left(E_i - E_1\right)\cdot 0{,}023\cdot E_1 + \left(0{,}023\cdot E_1\right)^2\right] + n^2\cdot(n-1)\cdot\left(0{,}023\cdot E_1\right)^2$$

zauważamy, że: $\sum_{i=1}^{n}\left(E_i - E_1\right) = 0$

$$(n+1)\cdot\sum_{i=1}^{n}\left[E_i - E_1\right]^2 = (n-1)\cdot\sum_{i=1}^{n}\left(E_i - E_1\right)^2 + (n-1)\cdot\sum_{i=1}^{n}\left(0{,}023\cdot E_1\right)^2 + n^2\cdot(n-1)\cdot\left(0{,}023\cdot E_1\right)^2$$

$$2\cdot\sum_{i=1}^{n}\left[E_i - E_1\right]^2 = n\cdot(n-1)\cdot\left(0{,}023\cdot E_1\right)^2 + n^2\cdot(n-1)\cdot\left(0{,}023\cdot E_1\right)^2$$

$$\frac{\sum_{i=1}^{n}\left[E_i - E_1\right]^2}{n\cdot(n-1)} = \frac{(n+1)\cdot\left(0{,}023\cdot E_1\right)^2}{2}$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{(n+1)}{2}}\cdot\left(0{,}023\cdot E_1\right)$$

Zatem niepewność typu A o poziomie ufności 95% dla ekspozycji względnej będzie wynosić:

$$U_{A95}(E) = 2 \cdot \sigma = 0{,}023 \cdot \sqrt{2 \cdot (n+1)} \cdot E_1$$

stąd dla poziomów dźwięku:

$$\pm U_{A95}(L_{eq}) = 10 \cdot \lg\left[1 \pm 0{,}023 \cdot \sqrt{2 \cdot (n+1)}\right]$$

gdzie:

n - liczba sekund od początku pomiaru do momentu spełnienia zalożenia „stabilizacji"

Widać, że przy naszym założeniu, że wynik naliczanego od początku pomiaru poziomu równoważnego z czasu pomiaru nie zmienia się bardziej niż 0,1 dB na 1 sekundę, wynika, że niepewność wyrażana dla poziomów dźwięku (asymetryczna!) zależy wyłącznie od czasu trwania pomiaru, wyrażonego w sekundach, do momentu zaobserwowania spełnienia założeń. Powyższy wzór ma tę właściwość, że przedział niepewności rośnie wraz z czasem - jest to fizycznie zrozumiałe: im więcej czasu musimy czekać na ustabilizowanie się wyniku, tym bardziej zmienny był badany poziom hałasu, a co za tym idzie jest większy przedział niepewności.

Jednocześnie bezpośrednio we wzorze jest „zakodowany" warunek zmienności energii jaki przyjęliśmy do oceny „ustabilizowania" się wskazania wyniku pomiaru poziomu równowaznego z czasu pomiaru.

Dla naszego modelu obserwujemy ustabilizowanie się wyniku pomiaru poziomu równoważnego z czasu pomiaru po ok. 70 sekundach, co daje nam przedział ufności U_{A95} w zakresie od +1,05 dB do -1,39 dB, co jest całkiem wiarygodnym szacunkiem, gdyż analizując zapis poziomów naszego modelu dla 5 pomiarów elementarnych po 15 sekund otrzymujemy przedział niepewności (+0,57; -0,65).

5. KONKLUZJA

Określając przedział niepewności dla wyniku badania poziomu równoważnego, musimy pamiętać, że:

- do analizy statystycznej pomiarów akustycznych nie można bezkrytycznie „zagęszczać” wyników pomiarów z danego czasu obserwacji - dolną granicą czasu pomiaru elementarnego jest czas obejmujący badane zdarzenia akustyczne,
- po właściwym wyborze czasu pomiaru elementarnego należy, oczywiście, wykonać jak najwięcej pomiarów (jest to analogia do „podzielenia” zarejestrowanych wyników z pomiaru ciągłego na pomiary elementarne) - uzyskujemy w ten sposób dobre uśrednienie wraz ze szczegółowym zbadaniem „rozrzutu” wyników dla badanego zjawiska akustycznego, co potwierdzają nam obliczenia statystyczne - czyli małe przedziały niepewności typu A,

Określiliśmy też przedziały niepewności poziomu równoważnego dla następujących sytuacji:

- czas emisji hałasu jest krótszy (i nie jest ścisle określony, ale znamy np. wartości graniczne) od czasu normatywnego dla ustalenia poziomu równoważnego - niepewność ekspozycji względnej danej sytuacji akustycznej przedstawia się wzorem:

$$U_{A,95}(E_{eq\_k}) = \sqrt{\left[\frac{t_k}{T} U_{A,95}(E_{em\_k})\right]^2 + \left[10^{0,1 \cdot L_{em\_k}} \cdot \frac{U_{A,95}(t_k)}{T}\right]^2}$$

- wykonujemy pomiar zmiennego hałasu obserwując wynik mierzonego poziomu równoważnego z czasu pomiaru oraz czas pomiaru do momentu, aż wahania wyniku będą poniżej 0,1 dB na 1 sekundę - wtedy przedział nieufności zmierzonego poziomu równowaznego możemy szacować na podstawie wzorów:

$$U_{A95}\left(L_{eq}\right) = \left(+10 \cdot \lg\left[1 + 0{,}023 \cdot \sqrt{2 \cdot (n+1)}\right]; -10 \cdot \lg\left[1 - 0{,}023 \cdot \sqrt{2 \cdot (n+1)}\right]\right)$$

czas [s]	$+U_{A95}$	$-U_{A95}$
15	0,53	-0,61
30	0,72	-0,87
45	0,87	-1,08
60	0,98	-1,27
75	1,08	-1,45
90	1,17	-1,61
105	1,25	-1,77
120	1,33	-1,92

LITERATURA:

1. I .N.Bronsztejn, K.A .Siemiendiajew, „Matematyka - Poradnik encyklopedyczny”, PWN, Warszawa 1976
2. Roman Nowak, „Statystyka dla fizyków”, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2002, ISBN 83-01-13702-9
3. „Wyrażanie niepewności pomiaru. Przewodnik.”, GUM, 1999, ISBN 83-906546-1-x
4. „Tablice matematyczne”, Wydawnictwo Adamantan, Warszawa 2004, ISBN 83-7350-048-0
5. Polska Norma PN-83/B-02154/02 - „*Akustyka budowlana. Pomiary izolacyjności akustycznej w budynkach i izolacyjności akustycznej elementów budowlanych. Ustalenia dotyczące dokładności.*”
6. T.Gerstenkorn, T.Śródka, „Kombinatoryka i rachunek prawdopodobieństwa”, PWN, Warszawa 1972, ISBN 83-01-00204-2
7. mgr Mikołaj Kirpluk "Statystyka w pomiarach akustycznych - podstawy" - referat opublikowany w Materiałach XXXIV Zimowej Szkoły Zagrożeń Wibroakustycznych (luty 2006),